

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2020-2021 г.г. по математике

Первый этап

7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

7.1. Антон испёк такой торт, который Арина смогла разделить одним прямолинейным разрезом на 4 части. Как такое могло быть? *(достаточно привести один пример)*

7.2. Сева написал на доске верное равенство, а Юра заменил в нём все цифры на буквы, причём разные цифры он заменил на разные буквы, а одинаковые – на одинаковые. В результате на доске оказалось записано

$$Я + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН = МЫ.$$

(Всего восемь слагаемых “ОН”). Какое равенство могло быть записано изначально? *(найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

7.3. За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудаков. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Чудаков говорит правду, если слева от него сидит лжец; лжец, если слева от него сидит рыцарь; всё что угодно, если слева от него сидит чудаков. Каждый из сидящих за столом сказал: “Справа от меня сидит лжец”. Сколько всего лжецов может находиться за столом? *(найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

7.4. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера, но, возможно, разной массы (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



7.5. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных натуральными числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка (например, мешок “2, 3, 6” хороший, а “4, 5, 10” – нет). Каково наибольшее возможное количество хороших мешков?

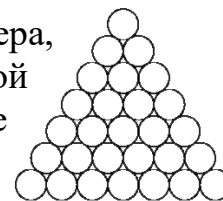
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2020-2021 г.г. по математике
Первый этап
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

8.1. Петя расставил в вершинах куба 8 различных чисел, после чего Вася в центре каждой грани записал сумму чисел в вершинах этой грани. Все шесть васиных чисел оказались равны между собой. Приведите пример, как такое могло быть.

8.2. Утёнок с гусёнком соревновались в триатлоне. Дистанция состояла из одинаковых по длине участков бега, плавания и полета. Утёнок бежал, плыл и летел с одинаковой скоростью. Гусёнок бежал вдвое медленнее утёнка, зато плыл вдвое быстрее. Кто и во сколько раз быстрее летел, если и стартовали, и финишировали они одновременно?

8.3. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера, но, возможно, разной массы (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



8.4. Какое наибольшее количество непересекающихся диагоналей можно провести в выпуклом n -угольнике (допускаются диагонали, имеющие общую вершину)?

8.5. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных натуральными числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка (например, мешок “2, 3, 6” хороший, а “4, 5, 10” – нет). Каково наибольшее возможное количество хороших мешков?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг

Первый этап

9 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. По кругу сидят рыцари и лжецы – всего 12 человек. Каждый из них сказал фразу: «Все сидящие за столом, кроме, может быть, меня и моих соседей, лжецы». Сколько за столом рыцарей, если рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут?

9.2. Сергей раскладывает 200 спичек на 6 разных кучек. Боря уравнивает количества спичек в некоторых двух кучках, взяв несколько спичек из большей из них (один раз). Боря стремится взять как можно меньшее количество спичек. Какое максимальное число спичек может Сергей заставить взять Боря?

9.3. Найти все тройки различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно их сумме. Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из этих чисел.

9.4. В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, H – основание высоты, опущенной из вершины B.. Известно, что угол MCA вдвое больше угла MAC, а длина BC равна 10 см. Найти длину отрезка AH.

9.5. Докажите, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нём не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг

Первый этап

10 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1.. Для каждого действительного числа x обозначим через $h(x)$ наибольшее значение функции $f(t) = t - t^2$ на промежутке $(-\infty, x]$. Найти все решения уравнения:
 $2x^2 - 3x + 3 = 8h(x)$.

10.2.. Найти минимальное натуральное число, которое можно получить в виде дроби $\frac{100x}{y}$, где x, y - некоторые двузначные числа.

10.3. Доказать, что для любых $0 \leq x, y \leq 1$ выполнено неравенство $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$.

10.4.. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC . На отрезке CM выбраны точки P и Q так, что P ближе к M , Q ближе к C и $CQ = 2PM$. Оказалось, что $BQ = AC$. Найти величину угла APM .

10.5. Каждый из 10 сортов конфет попробовали больше половины учащихся класса. Докажите, что можно выбрать некоторых трёх учащихся таких, что каждый сорт конфет попробовал хотя бы один из них.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг

Первый этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все решения уравнения $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+4x} + \sqrt{x^2+y^2-2y-3} = \sqrt{x^4-16} - y + 5$.

11.2. Пусть a, b, c – длины сторон произвольного треугольника. Доказать, что $a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+ac+bc)$.

11.3. Пусть Q и P – основания перпендикуляров, опущенных из вершины B треугольника ABC на биссектрисы его углов A и C соответственно. Доказать, что прямая PQ параллельна стороне AC .

11.4. Найти все натуральные числа N такие, что $N=p(N)+s(N)$, где $p(N)$ -произведение всех цифр в десятичной записи N , а $s(N)$ - сумма всех цифр в десятичной записи N .

11.5. В турнире каждая из 15 команд сыграла с каждой другой ровно один раз. Докажите, что хотя бы в одной из игр встретились две команды, сыгравшие перед этим в сумме нечётное число игр.